Petit guide du calcul différentiel, Rouvière. p 83-85 (exo 26)

152
215

Développement : différentielle du déterminant

Lemme : $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{R})$.

Démo : (1) $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ image réciproque d'un ouvert par une application continue donc ouvert dans $M_n(\mathbb{R})$.
Soit $Y \in M_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. On peut choisir (ε_k) convergent vers 0 dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\det(Y - \varepsilon_k I_n) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \varepsilon_k) \neq 0$.
Ainsi les matrices $X_k = Y - \varepsilon_k I_n$ sont inversibles et convergent vers Y. D'où le résultat.

Théorème : Soit $\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$. On a donc pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$ et pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$: $D_X \det . H = Tr({}^t Com(X) . H)$.

Démo :
(2)
- Calcul de $D_{I_n} \det$.
Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ses valeurs propres. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors :
$\det(I_n + tH) = \prod_{i=1}^{n}(1 + t\lambda_i) = 1 + t\,Tr(H) + O(t^2) = 1 + t\,Tr(H) + o(t)$
Ainsi, $D_{I_n} \det(H) = Tr(H)$.
- Calcul de $D_X \det$ pour $X \in GL_n(\mathbb{R})$
$\det(X+H) = \det(X(I_n + X^{-1}H)) = \det(X)\,(1 + Tr(X^{-1}H) + o(\|H\|))$
Pk $o(\|H\|)$?
$= \det(X) + Tr(\det(X)\,X^{-1}H) + o(\|H\|) = \det(X) + Tr({}^t Com(X) H) + o(\|H\|)$
Ainsi, $D_X \det(H) = Tr({}^t Com(X) H)$
- Calcul de $D_X \det$ pour $X \in M_n(\mathbb{R})$ quelconque.
savoir pk ces app sont cont.
L'application $X \longmapsto {}^t Com\, X$ est continue donc $f : X \longmapsto Tr({}^t Com\, X)$ est continue et $g : X \longmapsto D_X \det$ est continue. On a donc que f et g coïncident sur $GL_n(\mathbb{R})$ qui est dense sur $M_n(\mathbb{R})$. On a donc $f = g$ sur $M_n(\mathbb{R})$.
Pk $f=g$? Quelle prop ?
↳ voir mes photos ou dernière
L'application $X \mapsto {}^t Com\, X$ continue puisque les cofacteurs sont des fct pol des coef de X.
Comme $\det$ est C^1, l'expression obtenue pour sa différentielle en un point inv se prolonge par continuité sur $M_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $X \in M_n(\mathbb{R})$, $\exists (X_m) \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ qui cv vers X et par cont de l'application : $D_{X_m} \det \xrightarrow[+\infty]{} D_X \det = Tr({}^t Com(X) \quad)$

Application : Soit $y_1, \dots, y_n$ des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ du système différentiel $y'(t) = A(t)y(t)$, où $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$ est une fonction continue et soit $w(t) = \det(y_1(t), \dots, y_n(t))$ leur déterminant wronskien. Alors $w'(t) = (\mathrm{Tr}\, A(t))\, w(t)$. De plus si A est constante, $\det(e^{tA}) = e^{t\,\mathrm{Tr}(A)}$.

3 **Démo :** On a $w'(t) = (t \mapsto \det(Y(t)))' = D_{Y(t)} \det(Y'(t))$

$= \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(Y(t)) \cdot Y'(t))$ par 2

$= \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(Y(t)) \cdot A(t)Y(t))$ $Y' = AY$

$= \mathrm{Tr}(A(t) \underbrace{Y(t)\, {}^t\mathrm{Com}(Y(t))})$ symétrie de la trace

$= \mathrm{Tr}(A(t) \quad \det(Y(t)) \quad) = \det(Y(t))\, \mathrm{Tr}(A(t))$

On obtient donc $w'(t) = \mathrm{Tr}(A(t))\, w(t)$ et, par conséquent,

⚠ multiplier par $e^{-\int_0^t \mathrm{Tr}(A)}$

$$w(t) = w(0) \exp\left(\int_0^t \mathrm{Tr}(A(s))\, ds\right).$$

ne pas diviser par $w(t)$.

Si de plus A est constant, alors en revenant au problème initial, on a

$Y'(t) = A\,Y(t)$ ce qui implique $Y(t) = Y(0)\, e^{tA}$

↳ ou diviser par $w(t) \neq 0$. Si $w(1) = 0$ alors $w = 0$ par C-L

On applique le déterminant à cette égalité pour obtenir $w(t) = w(0) \det(e^{tA})$

Utilisons maintenant le résultat dans le cas où A n'est pas constant, on obtient alors $w(t) = w(0) \exp(t\, \mathrm{Tr}(A))$. D'où le résultat.

Autre démo de $\det(e^{tA}) = e^{t\,\mathrm{Tr}(A)}$ dans le Rombaldi maths pour l'agreg.

Lemme : Soit $\left.\begin{array}{l} f : E \to F \\ g : E \to F \end{array}\right\}$ continues E et F espaces métriques.

Si il existe $A \subset E$ dense dans E tel que $f_{|A} = g_{|A}$ alors $f = g$.

Preuve : Soit $x \in E$ et $(x_n) \subset A$ tq $\lim x_n = x$ (A dense de E)

alors $f(x) \underset{\text{car } f \text{ continue}}{=} \lim(f(x_n)) \underset{\text{car } f_{|A} = g_{|A}}{=} \lim(g(x_n)) \underset{\text{car } g \text{ continue}}{=} g(x)$